Abschlussprüfungen zu: Exponentielle Zunahme / Abnahme

AP 2000 AI

2.0 Für den Wert W(t) eines Autos (in DM) in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ (in Tagen) gelte der Zusammenhang $W(t) = W_o \cdot e^{kt}$ mit einer geeigneten Konstanten k und dem Neupreis W_o. Die Benennungen können in den Formeln jeweils weggelassen werden.

2.1 Ein Händler geht davon aus, dass sich der Wert eines bestimmten Autotyps nach 3,5 Jahren (1 Jahr = 360 Tage) halbiert hat. Berechnen Sie daraus die Konstante k. [3]

(Ergebnis: $k = -\dfrac{\ln 2}{1260}$)

2.2 Zum Zeitpunkt $t = t_E$ hat ein Auto dieses Typs, das einen Neupreis von 35000 DM hat, noch den „Schrottwert“ 1500 DM. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt t_E. [3]

2.3 Nun wird die Ableitungsfunktion $\dot{W} : t \mapsto \dot{W}(t)$ mit $\dot{W}(t) = \dfrac{dW(t)}{dt}$ und $t \in \,]0; t_E[$ betrachtet.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $\dot{W}(t)$ an den Randstellen des Definitionsbereichs, und interpretieren Sie die Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang. [6]

AP 2001 AII

3.0 Bei einer bestimmten gedämpften Schwingung kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten die Auslenkung s(t) in Abhängigkeit von der Zeit t für $t \geq 0$ durch den folgenden Term beschrieben werden: $s(t) = 2 \cdot e^{-t} \cdot [\cos(5t) + 0{,}2 \cdot \sin(5t)]$.

3.1 Bilden Sie die erste Ableitung von s(t) nach der Zeit t und begründen Sie, dass die Extremalpunkte der Auslenkung s(t) jeweils auf einem der Graphen der Funktionen $y = 2 \cdot e^{-t}$ oder $y = -2 \cdot e^{-t}$ liegen. (Zur Kontrolle: $\dfrac{ds(t)}{dt} = -10{,}4 \cdot e^{-t} \cdot \sin(5t)$) [7]

3.2 Zeigen Sie, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Maxima der Auslenkung konstant $\Delta t = 0{,}4 \cdot \pi$ beträgt. Berechnen Sie, auf wie viel Prozent die Auslenkung von einem beliebigen Maximum zum nächsten Maximum abnimmt. [5]

AP 2002 AI

2.0 Beim Ladevorgang eines bestimmten Kondensators kann die Stromstärke J(t) in Abhängigkeit von der Zeit t mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:

$J(t) = 130 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ für $0 \leq t \leq t_E$;

t_E ist dabei der Zeitpunkt, zu dem der Ladevorgang beendet wird.

2.1 Der Zeitpunkt t_E ist erreicht, wenn J(t) unter 5 % seines Anfangswertes sinkt.
Zeigen Sie, dass gilt: $t_E \approx 12$. [4]

2.2 Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem für den betrachteten Ladevorgang den Graph der Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab und berechnen Sie geeignete Funktionswerte. [5]

2.3.0 Die im Zeitintervall von t_1 bis t_2 transportierte Ladung Q lässt sich durch folgende Integration berechnen: $Q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)\,dt$.

2.3.1 Berechnen Sie die Maßzahl der Ladung des betrachteten Kondensators zum Zeitpunkt t_E, und stellen Sie diese Maßzahl im Diagramm aus 2.2 graphisch dar. [4]

2.3.2 Berechnen Sie die theoretisch maximale Ladung , die sich für $t_E \to \infty$ ergeben würde, und den Prozentsatz, zu dem der Kondensator zum Zeitpunkt t_E geladen ist. [3]

AP 2003 AII

2.0 Die Geschwindigkeit v eines in einer bestimmten Flüssigkeit unter Reibungseinfluss fallenden Körpers kann mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten in Abhängigkeit von der Zeit t durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden:

$v(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0{,}654 \cdot t})$ für $t \geq 0$.

Grundlage für die folgenden Teilaufgaben sind die bekannten physikalischen Zusammenhänge, dass die Geschwindigkeitsfunktion die Ableitungsfunktion der Ortsfunktion und die Beschleunigungsfunktion die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeitsfunktion ist.

2.1 Berechnen Sie v(0) und $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse in dem gegebenen Zusammenhang. [4]

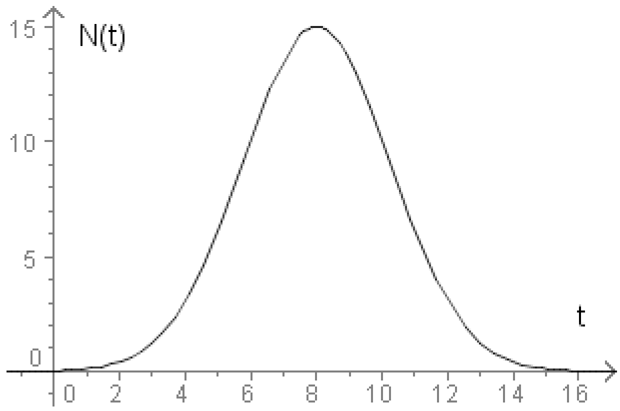
2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem gilt: $v(t_1) = 9{,}0$. [3]
(Ergebnis: $t_1 \approx 1{,}4$)

2.3 Berechnen Sie für t = 0 und für $t = t_1$ ohne Benennungen die Werte der Beschleunigung, die der Körper momentan erfährt. [4]

2.4 Berechnen Sie die im Zeitintervall $[\,0; t_1\,]$ durchfallene Strecke. [4]

AP 2006 AI

2.0 Nebenstehendes Diagramm entspricht näherungsweise dem Verlauf einer lokal beschränkten Epidemie innerhalb einer Bevölkerung. Für die zeitliche Abhängigkeit der Anzahl der Erkrankten in Tausend gilt ohne Berücksichtigung der Einheiten die Gleichung $N(t) = 15 \cdot e^{-0{,}1 \cdot (t-8)^2}$, wobei t als Zeitangabe in Wochen zu interpretieren ist. Zunächst sind nur wenige Personen von der Krankheit betroffen, jedoch breitet sie sich wegen der hohen Ansteckungsgefahr schnell in der Bevölkerung aus. Wegen der anlaufenden Impfaktion und der Personen, die die Krankheit überstanden haben, steigt der Bevölkerungsanteil der gegen die Krankheit immunen Menschen. Dadurch sinkt der Anstieg der Neuerkrankungen und die Epidemie klingt ab.



2.1 Berechnen Sie die Zeitspanne, in der sich die Anzahl der Krankheitsfälle bezogen auf das Ende der 1. Woche auf den dreifachen Wert vergrößert. [6]

2.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, in dem die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit am stärksten ist. Geben Sie auch die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag für diesen Zeitpunkt an. [9]

2.3 Ermitteln Sie durch Rechnung den Hochpunkt der Funktion N und interpretieren Sie die Koordinaten des Hochpunkts im Sinne der Aufgabenstellung. [3]

2.4 Die Epidemie gilt als überstanden, wenn wieder der Krankenstand wie zur Zeit $t = 0$ erreicht ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. [3]

AP 2006 AII

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $G: t \mapsto G_0 \cdot e^{kt}$ mit $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$, $G_0 \in \mathbb{R} \wedge G_0 > 0$ und $k \in \mathbb{R}$.
G(t) beschreibt die exponentielle Zunahme bzw. Abnahme einer Anfangsmenge G_0 in Abhängigkeit von der Zeit t.

3.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion G einen Wachstums- bzw. einen Abnahmeprozess beschreibt. [3]

3.2.0 G(t) bezeichnet im Folgenden für $t \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Geburten eines bestimmten Kalenderjahres in Deutschland. Im Jahr 2003 wurden $709{,}4 \cdot 10^3$ Geburten registriert.
Aus den vorangegangenen Jahren ergibt sich für k der auch für die fraglichen Zeiträume der folgenden Teilaufgaben als konstant angenommene Wert $k = -0{,}01213$.

3.2.1 Erstellen Sie eine Prognose für die Anzahl der Geburten in Deutschland im Jahr 2020. [2]

3.2.2 Berechnen Sie, in welchem Kalenderjahr die Anzahl der Geburten in Deutschland erstmals den Wert $650{,}0 \cdot 10^3$ unterschreiten wird. [5]

3.2.3 Ermitteln Sie für das oben angegebene k die prozentuale jährliche Abnahme der Anzahl der Geburten in Deutschland. [4]

AP 2008 AI

1.0 Für die Maßzahl p(h) des barometrischen Luftdrucks mit der Einheit Hektopascal gilt in Abhängigkeit von der Maßzahl h der Höhe über der Erdoberfläche mit der Einheit Kilometer in guter Näherung die Funktionsgleichung $p(h) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5,5}}$, wobei $h \geq 0$.
Auf die Mitführung der Einheiten wird somit verzichtet.

1.1 Berechnen Sie, in welcher Höhe $h = h_H$ der Luftdruck nur noch die Hälfte des Wertes an der Erdoberfläche annimmt. [3]

1.2 Zeigen Sie, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme um $\Delta h = h_H$ unabhängig von der Ausgangshöhe h_A jeweils halbiert wird. [4]

1.3 Berechnen Sie, ab welcher Höhe der Luftdruck weniger als $\frac{1}{1000}$ des Wertes an der Erdoberfläche beträgt. [3]

1.4 Zeigen Sie, dass man die Funktionsgleichung auch in der Form $p(h) = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5} \cdot h}$ schreiben kann, und berechnen Sie daraus die Ableitungsfunktion $\frac{dp(h)}{dh}$. [3]

1.5 Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten $\frac{p(1) - p(0)}{1 - 0}$ sowie den Wert des Differentialquotienten der Funktion p(h) an der Stelle $h_0 = 1$ und geben Sie die physikalische Bedeutung der beiden Werte an. [4]

Nachtermin 2001

3.0 Durch die beiden Gleichungen $y_1 = 1000 + mx$ und $y_2 = 1000 \cdot e^{kx}$ mit den reellen Konstanten k und m werden mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten zwei Wachstumsprozesse beschrieben.
Für $x_0 = 10$ betragen bei beiden Wachstumsprozessen die zugehörigen y-Werte 2000.

3.1 Berechnen Sie die Konstanten k und m. [3]
(Teilergebnis: $k = \frac{\ln 2}{10}$)

3.2 Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet den x-Wert aus dem Intervall $[0; 10]$, für den die Differenz $y_1 - y_2$ den absolut größten Wert annimmt. [7]

Nachtermin 2003

3.0 Beim Einschalten eines Gleichstromkreises, in dem eine Spule mit der Induktivität L und ein Ohmscher Widerstand R in Reihe geschaltet sind, lässt sich der zeitliche Verlauf der Stromstärke ohne Verwendung von Einheiten für die Zeit $t \geq 0$ wie folgt beschreiben:

$$J(t) = 6{,}0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}) \; .$$

3.1 Berechnen Sie in Abhängigkeit der genannten Größen den Zeitpunkt t_1, an dem die Stromstärke die Hälfte von $J_{max} = 6{,}0$ erreicht. [4]

(Ergebnis: $t_1 = \frac{L \cdot \ln 2}{R}$)

3.2 Der Zeitpunkt t_1 wird gemessen und man erhält $t_1 = 2{,}2$.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2, an dem die Stromstärke 80% von $J_{max} = 6{,}0$ beträgt. [6]

3.3 Der rechtsseitige Grenzwert der Ableitung $\frac{dJ}{dt}$ für $t \to 0$ wird als Steigung des Graphen der Funktion J(t) an der Stelle t = 0 definiert. Berechnen Sie den zugehörigen Steigungswinkel. [5]

3.4 Zeichnen Sie unter Verwendung <u>aller</u> bisherigen Ergebnisse für $0 \leq t \leq 10$ den Graph der Funktion J(t) und dessen Asymptote. [5]